

基于岩石性质的钻进振动响应分析

陈晓君¹, 陈根龙¹, 宋刚¹, 陈小根²

(1. 中国地质科学院勘探技术研究所, 河北 廊坊 065000; 2. 中建三局第一建设工程有限责任公司, 湖北 武汉 430000)

摘要: 岩石在钻头破岩工作时会产生振动, 为了研究岩石特性对钻进过程中岩石振动的影响, 提出一种基于振动的岩石特性识别方法。通过振动学理论和弹性力学知识建立岩石振动方程, 利用数值模拟软件分析不同参数对岩石振动的影响。研究表明: 冲击荷载下岩石产生振动, 岩石特性对振动有紧密关系; 岩石的密度、刚度和抗压强度对岩石的振动都有一定影响, 其中岩石强度对振动的影响最为明显; 岩石刚度越小, 强度越小, 在冲击荷载作用下, 岩石振动越大。研究冲击钻进过程岩石的振动特性, 对钻进参数设置以及岩性的识别有重要意义。

关键词: 振动; 岩石性质; 冲击荷载; 数值模拟; 钻进参数

中图分类号: P634 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-7428(2019)10-0020-07

Analysis of drilling vibration response based on rock properties

CHEN Xiaojun¹, CHEN Genlong¹, SONG Gang¹, CHEN Xiaogen²

(1. The Institute of Exploration Techniques, CAGS, Langfang Hebei 065000, China;

2. China Construction Third Bureau First Engineering Co., Ltd., Wuhan Hubei 430000, China)

Abstract: Rock vibrates when the bit breaks rock. In order to study the influence of rock characteristics on rock vibration during drilling, a vibration-based rock identification method is proposed. Rock vibration equations are established on vibration theory and elastic mechanics, and numerical simulation software is used to analyze the influence of different parameters on rock vibration. Research shows that rock vibrates under the impact load, and rock properties are closely related to vibration; the density, rigidity and compressive strength of rock has a certain effect on rock vibration, and the rock strength has the most obvious effect; the smaller the rock rigidity, the lower the strength. The rock vibrates more under the impact load. Studying the vibration characteristics of rock during impact drilling is of great significance for drilling parameter setting and lithology identification.

Key words: vibration; rock properties; impact load; numerical simulation; drilling parameters

0 引言

钻井过程中需要通过岩石特性的识别判断所钻地层地质特性以及地层层面划分, 实时识别钻头当前位置的岩性信息, 根据岩石特性合理选择钻头的类型, 钻孔方式和优选钻井参数, 提高破岩效率, 降低钻井成本^[1-2]。钻进工作时, 钻头与岩石接触会产生一系列的振动信号, 提取这些振动信号进行分析和处理, 可以得到有关岩石性质的有效信息。

国内外对随钻的振动研究做了大量工作。Drumheller、Knudsen S D. 等^[3-4]研究了声波在钻

杆振动中的传播规律。Tsoutrelis C E, A. Patel 等^[5-7]根据钻进过程中的转速和钻压对钻进地层空区进行了识别。岳中琦等^[8-10]基于自行开发的钻孔过程监测系统在香港冲填土-风化花岗岩地基勘察中开展了实地钻进研究。王珍应等^[11]提出钻杆轴向振动特性的广义状态向量, 并通过钻杆轴向振动分析寻找井底岩性识别的方法。田家林等^[12]研究了高频扭转振动频率对钻机机械钻速的影响, 得到了岩石固有频率与扭振频率的关系。Martin Zborovjan 等^[13]通过提取钻进过程的声学信息, 将

收稿日期: 2018-09-27; 修回日期: 2019-09-20 DOI: 10.12143/j.tkgc.2019.10.004

基金项目: 国家重点研发计划资助“多金属矿岩心钻探关键技术装备联合研发及示范”(编号: 2016YFE0202200)

作者简介: 陈晓君, 男, 汉族, 1989 年生, 硕士, 探矿工程专业, 从事钻探工程工艺和器具研发工作, 河北省廊坊市金光道 77 号, chenxiaojun.107@163.com。

引用格式: 陈晓君, 陈根龙, 宋刚, 等. 基于岩石性质的钻进振动响应分析[J]. 探矿工程(岩土钻掘工程), 2019, 46(10): 20-26.

CHEN Xiaojun, CHEN Genlong, SONG Gang, et al. Analysis of drilling vibration response based on rock properties[J]. Exploration Engineering (Rock & Soil Drilling and Tunneling), 2019, 46(10): 20-26.

获得的振动信号利用傅里叶转化,用来监测岩石的破裂与岩石特性之间的关系,但所研究的范围有限。刘刚等^[14-15]通过室内实验,提取了钻头钻进不同介质的振动信号,建立了不同信号的“指纹”特征,通过 ANN 完成了不同材料的特性识别。

综上,现阶段的研究主要集中在对钻进过程钻具的振动分析,包括钻杆的横向、纵向及扭振动的研究,成果多是为了提高破岩效率,在岩性识别上涉及不多。笔者通过建立钻进过程岩石的振动模型,主要分析岩石在钻头破岩时的振动信号,通过模拟研究,得到岩石特性对振动的影响,从而寻求一种识别岩性的新途径。

1 岩石振动方程的建立

1.1 岩石的力学模型

钻头通过刀片与岩石接触,在旋转冲击作用下,岩石产生振动响应,对岩石微元 dx 在振动情况下进行受力分析,根据牛顿定律得到^[16]:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_0 \omega(t) \right] = 0 \quad (1)$$

式中: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} [k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] / (\frac{\partial^2}{\partial x^2})$ ——岩石微元因振动变形而产生的载荷; k ——岩石的刚度; $m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ——岩石微元的质量惯性; m ——岩石材料的质量; g ; $F = F_0 \omega(t)$ ——岩石振动的响应力; F_0 ——岩石振动响应力的幅值; $\omega(t)$ ——振动响应力随时间的变化。

这里岩石的振动视为一个简谐振动,根据简谐振动运动方程,设 $y(x, t) = Y(x) \sin(pt + x)$, 其中 $Y(x)$ 为主函数,将 $y(x, t)$ 代入式(1)得:

$$k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} F_0 \omega(t) - \rho p^2 Y A = 0 \quad (2)$$

在初始位置处,岩石位移为零,即 $x = 0, Y(0) = 0, Y''(0) = 0$, 当岩石的振动位移达到最大值时,即 $x = L, Y(L) = 0, Y''(L) = 0$, 便可得到岩石振动响应力 F 的运动方程:

$$F(t) = ma(t) + cv(t) + kx(t) \quad (3)$$

式中: $a(t)$ ——振动加速度, m/s^2 ; c ——阻尼系数; $v(t)$ ——振动速度, m/s ; $x(t)$ ——振动位移, m 。其中:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \quad (4)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = x''(t) \quad (5)$$

1.2 建立岩石振动方程

岩石钻进的振动系统的简化模型如图 1 所示,该模型将岩石视为弹性体,忽略钻具振动等因素的影响,由钻头和岩石共同组成一个钻进振动系统。

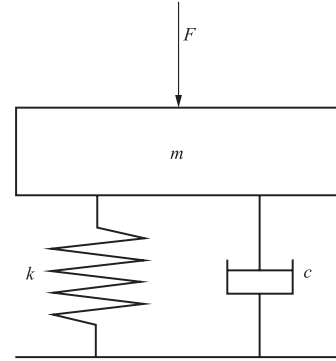


图 1 钻进振动系统模型

Fig.1 Drilling vibration system model

岩石在钻头接触时受到的冲击力设为简谐波激励,因此振动响应力 F 又可以表示为:

$$F(t) = kA \cos(\omega t) \quad (6)$$

式中: A ——简谐波的振幅; k ——弹性系数; ω ——简谐波的振动频率。

同时,引入一个无量纲常数 ξ , 设 $\xi = c / (2m\omega_0)$, 它表示相对阻尼系数,其中 ω_0 表示岩石的固有频率,联立式(3)、式(6),并代入 ξ 进行简化得到岩石的振动方程:

$$x''(t) + 2\xi\omega_0 x'(t) + \omega_0^2 x = \omega_0^2 A \cos(\omega t) \quad (7)$$

上式是一个二阶常系数非齐次线性微分方程,根据微分方程求解可得上面方程的特解为:

$$x = F_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (8)$$

式中: x ——岩石在振动下的运动位移; F_0 ——岩石的振动幅度; φ_0 ——与时间无关的常数,表示位移的初始相角。进一步计算可得到振动方程的通解为:

$$x = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \varphi) + F_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0) \quad (9)$$

式(9)就是岩石在钻头作用下的振动响应运动方程。

2 建立钻进模型

2.1 基本假设

由于岩石力学参数和钻机的钻进参数的影响,岩石钻进是一个比较复杂的过程,而此次主要是研究岩石在钻头破岩过程中的振动信号。为了方便研

究分析,提高效率,对研究模型有以下假设:

(1)假设岩石材料是各向同性的均匀介质,并且不考虑在岩石内部的原生裂隙;

(2)钻头破岩钻进时,因为钻头具有远高于岩石的强度和硬度,所以假设钻头是刚体,忽略其变形影响;

(3)钻进过程中会产生岩屑,假设破碎岩屑不再参与后续钻进过程。

2.2 模型构建

根据以上假设与分析,将岩石定义为柔性体,钻头定义为刚性,在钻进过程中,钻头与岩石表面接触,并侵入岩石模型内。本次钻进模型共由11个部分组成,节点总数是89044。其中岩石模型的网格单元划分节点总数为61975,将岩石划分成中心密集周围疏松的网格单元,采用中轴算法,这样不但可以保证计算精度还能节省计算时间。钻头整体部分包括钻杆、钻头、钻齿、连接器,网格节点总数是27069。通过数值模拟试运行,此钻进模型在计算效率和输出稳定性上都表现优良。

通常来说,模型的本构关系及参数设定是整个数值模拟过程的核心,它决定了模拟的计算精度和求解效率。关于岩石本构关系的模型有很多个,适用于不同的力学条件。本次研究采用Drucker-Prager模型,针对4种不同岩石进行模拟分析,岩石钻进过程的三维模型是根据岩石力学、弹塑性力学和岩土塑性力学的知识建立的,在不考虑地层复杂应力作用的约束下模拟了钻头破岩的过程。边界条件:对于钻头来说,其本身不受外力影响,仅在竖直方向存在静态荷载和冲击动态荷载;而对于岩石来说,这里我们所考虑的外界影响是一个理想状态下,即无覆土压力的影响,且岩石的底部在钻进过程中无位移变化。钻进过程模拟的数值模型如图2所示。

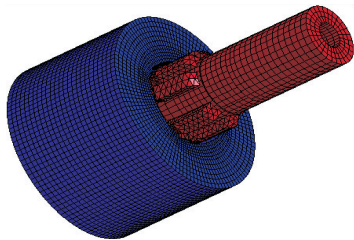


图2 钻进过程数值模型

Fig.2 Numerical model of drilling process

3 结果与分析

利用数值模拟软件Ansys的结构分析模块对建立的钻进模型进行计算分析。模拟钻头破岩过程,获得岩石节点的一组振动数据,不同岩性的岩石在相同钻进参数条件下的钻进得到多组数据。对振动信号数据提取分析,主要针对岩石的刚度、密度、抗压强度等参数在钻进过程中对岩石振动的影响。岩石的物理特性参数见表1。

表1 模型中岩石的物理参数

Table 1 Physical parameters of rocks in the model

岩石编号	岩石名称	单轴抗压强度/MPa	密度/(g·cm ⁻³)	抗拉强度/MPa	固有频率/kHz	弹性模量E/GPa	泊松比μ
1	石灰岩	66.9	2.70	8.26	2.18	55.8	0.28
2	板岩	81.1	2.40	10.01	1.48	41.3	0.25
3	页岩	102.6	2.83	12.30	2.21	110.2	0.16
4	石英岩	114.3	2.65	14.11	2.16	130.5	0.17

3.1 钻进过程岩石应力分析

在进行数值模拟计算时,给钻头施加一个钻压和绕钻头轴线转动的转速,钻头在钻压的作用下向下移动。钻头通过钻齿与岩石表面接触,施加在钻头上的冲击力作用在岩石表面,钻齿慢慢侵入岩石内部,同时接触的岩石和钻头产生了摩擦力;钻头的转动使钻头开始切削岩石,这时地层就同时受到钻头的压力、摩擦力、切削力的作用,当岩石应力大于其屈服强度,岩石发生屈服但没有破坏,进入塑性硬化阶段。图3是在同一时间抓取的钻头破岩过程的等效应力云图,显示了不同岩性岩石在钻进过程中的应力情况。

由图3可以直观地看到,不同岩性的岩石在钻头附近都产生了应力集中现象,由于岩性的不同,应力集中的程度也不一样。这表明在钻进过程中,随着岩性的变化,钻头受到的岩石的反作用力不同。不同岩石在相同钻进参数下的响应力的变化曲线如图4所示。

从图4可以看到,不同的岩石的等效应力变化趋势大致相同,但是应力的最大值和最小值出现的时间各不相同,由此可以反映出岩石的性质对岩石的等效应力产生了一定影响。钻头在岩石的反作用力,会瞬间中断与岩石的接触,即钻头产生回弹运动,岩石产生的响应力会有一个从峰值到一个低值的过程。由于存在的冲击力,钻头很快便再次与岩石接触,继续钻进过程。于是,岩石响应力便再由低

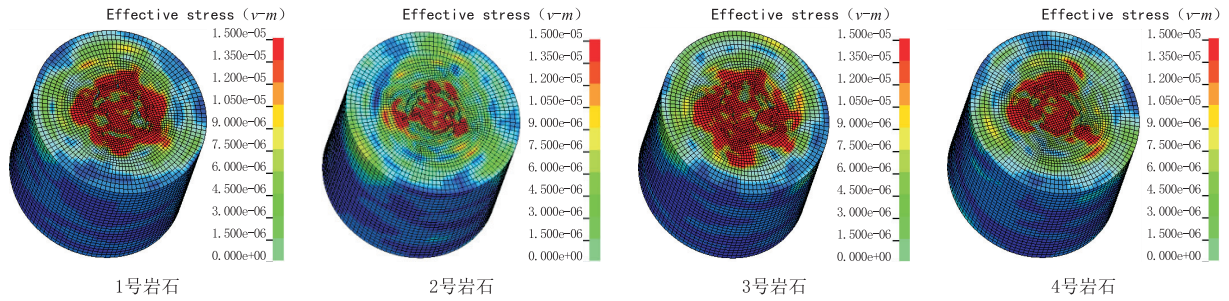


图 3 钻进过程不同岩石同一时刻的应力分布图

Fig.3 Stress distribution of different rocks at the same time during drilling

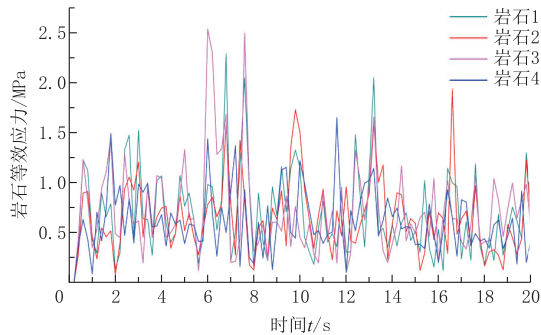


图 4 不同岩石的等效应力变化曲线

Fig.4 Equivalent stress curves of different rocks

值不断增加,直至峰值。随着时间推移,岩石的响应力形成一个近似周期性变化。通过数据提取计算,可以得到 4 种岩石模型等效应力的平均值。4 种岩石按照响应力平均值的大小排列顺序为:3 号岩石 > 1 号岩石 > 4 号岩石 > 2 号岩石。

3.2 岩石振动的影响因素

根据以上分析,岩石的性质是影响岩石振动的

关键因素。设置相同的钻进参数,包括冲击荷载、转速、钻进速率等,通过改变岩石的某一性质参数,运用数值模拟软件进行计算分析,研究岩石的性质对振动的影响。提取岩石节点的振动信号数据,结合上面建立的岩石振动方程,利用 MATLAB 软件进行数据分析,研究钻进过程中岩石的密度、刚度等性质参数对岩石振动信号的影响,找到基于岩石振动的岩性识别新方法。

3.2.1 密度对岩石振动影响分析

在 $t=2.0\text{ s}$ 时刻,不同密度的岩石的振动的位移云图如图 5 所示。从图 5 可以直观地看到,在其它参数都相同的情况下,在同一钻进时刻,密度小的岩石,振动位移的分布更广,这表明岩石的密度越小,岩石越容易产生振动。在不同密度岩石上取同一点,通过提取该点的位移、速度随时间变化曲线,如图 6 所示。

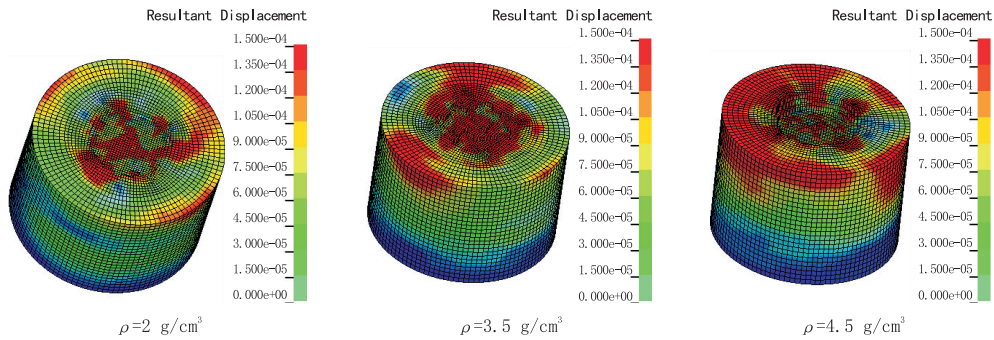


图 5 $t=2.0\text{ s}$ 不同密度岩石的振动位移

Fig.5 Vibration displacement of rocks with different densities at $t=2.0\text{ s}$

图 6 显示了不同密度岩石上同一坐标点的振动速度、位移随时间变化曲线。由位移和速度曲线可以看出,岩石密度与岩石的振动有一定的影响。具体来说,岩石密度越小,岩石的振动越容易发生,但振动的幅度越小。而且,密度相对较小的岩石,开始

的振动速度较大,随着钻进的继续,速度开始越来越小。而密度相对较大的岩石,其振动速度开始比较小,到后面越来越大,振动幅度也更大。

3.2.2 刚度对岩石振动的影响

研究岩石性质对岩石振动的影响时,在设置岩

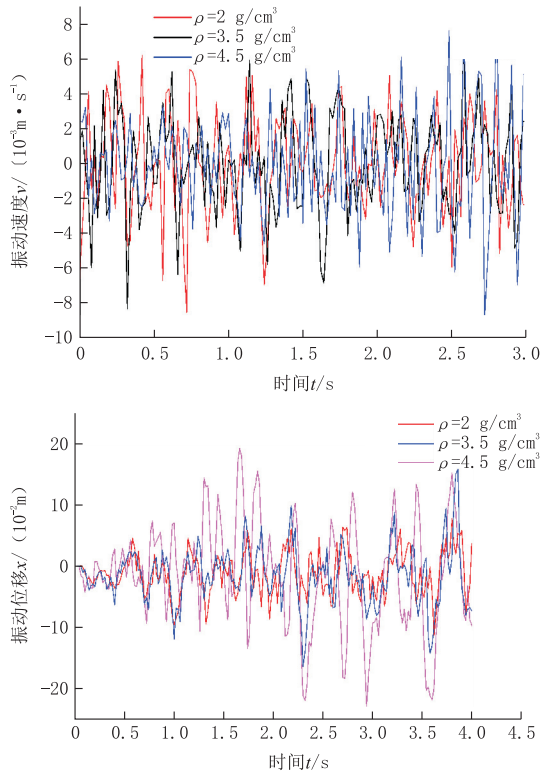


图6 不同密度岩石的振动位移、速度曲线

Fig.6 Vibration displacement and velocity curves of rocks with different densities

石物理模型的材料参数时,可以选择材料的弹性模量和刚度,二者是相关联的一组物理量。弹性模量 E 是材料在外力作用下产生单位弹性变形所需要的应力,反映材料抵抗变形能力的指标。刚度 K 是结构或构件抵抗弹性变形的能力,用产生单位应变所需要的力或力矩来表示。前者是材料物质组成的性质,而后者是材料固体性质。它们之间本身呈正相关,弹性模量大的岩石,刚度也越大,岩石也越不容易发生变形。在前面理论部分介绍中,这里的岩石模型中弹性元件简化为弹簧片,其弹性模量相当于刚度。所以,这里只分析岩石刚度对振动的影响。

在钻进参数和其它岩石性质参数设置相同的条件下,提取3种不同刚度岩石模型上同一单元节点上的振动位移和振动速度数据,得到岩石振动位移与速度曲线如图7所示。

通过不同刚度下岩石振动的位移和速度曲线可以看出,岩石刚度越小,岩石在冲击作用下产生的振动幅度就越大,越容易达到最大振动位移和最大振动速度。因为岩石刚度和弹性模量成正比,在冲击力与其它性质参数保持不变时,岩石刚度越大,岩石

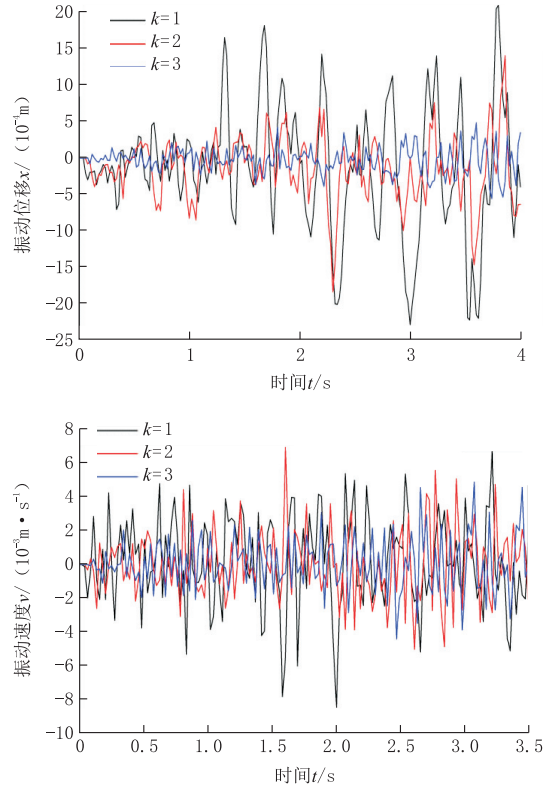


图7 不同刚度的岩石振动位移、速度曲线

Fig.7 Vibration displacement and velocity curves of rocks with different rigidity

抵抗变形的能力就越强,岩石越不容易发生变形,振动的最大位移也就越小。

3.2.3 单轴抗压强度对岩石振动的影响分析

岩石的强度是确定岩石工程稳定性的主要因素,一般包括抗压强度(单轴抗压强度和三轴抗压强度)、抗拉强度、抗剪强度。岩石强度主要取决于构成岩石矿物和颗粒之间的联结力和微裂隙的影响,岩石在冲击作用下产生振动也会受到这些组成成分和彼此之间相互作用力的影响,因此考虑岩石强度与岩石振动之间有一定的联系。岩石物理模型的建立,考虑的是无围压作用,所以这里岩石的强度只分析岩石单轴抗压强度对岩石振动的影响。在钻进的同一个小时刻,单轴抗压强度不同的岩石振动位移云图如图8所示。

通过位移云图可以清晰地看出,岩石的抗压强度对岩石的振动有一定的影响,而且影响程度比岩石密度、刚度对岩石振动的影响更大一些。在钻进工况相同的条件下,岩石的其它物理参数也保持不变,岩石的抗压强度越大,岩石振动的位移越小,且振动情况越不明显。岩石抗压强度越大,其所能承

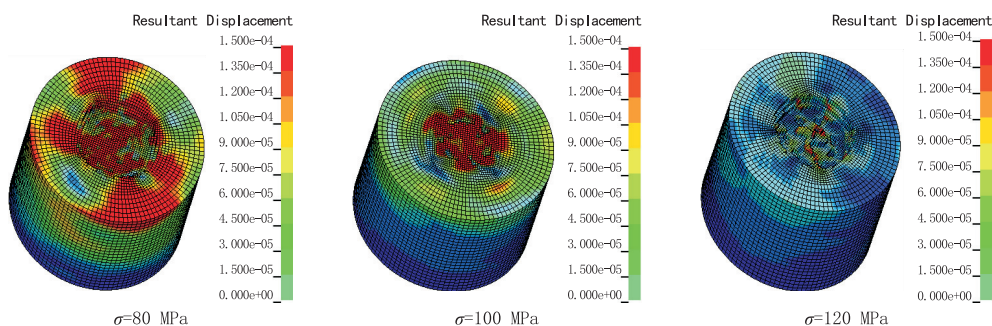


图 8 不同抗压强度的岩石位移云图

Fig.8 Displacement nephogram of rocks with different compressive strengths

受的压力破坏极限就越大,就越不容易发生变形破坏。因此,在保持钻进冲击力相同的条件下,抗压强度小的岩石更容易产生变形,振动情况就更加明显。而抗压强度大的岩石,其矿物颗粒之间的联结力更大,所以在相同冲击力作用下振动的位移范围和幅度都更小一些。

在不同抗压强度的岩石模型上取同一单元节点,提取它们的振动信号,得到岩石振动位移与速度的变化曲线,如图 9 所示。岩石强度对钻进过程中

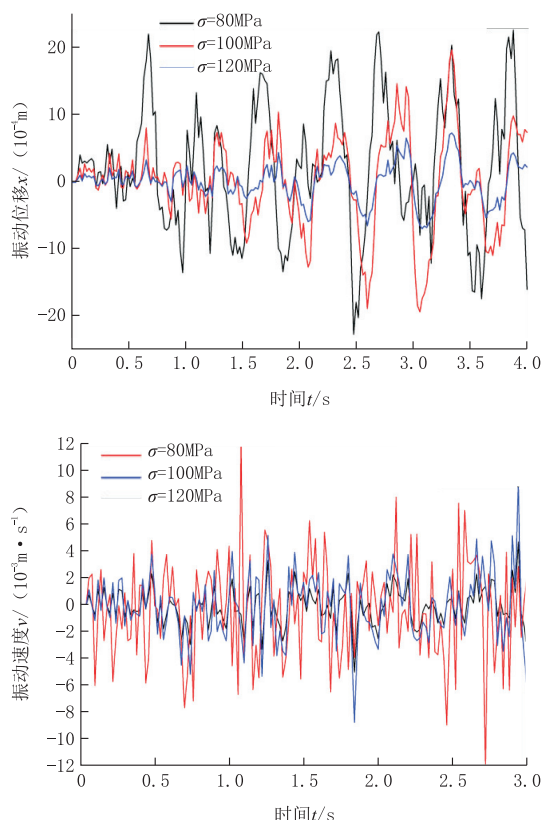


图 9 不同抗压强度的岩石振动位移、速度变化曲线

Fig.9 Displacement and velocity curves of rocks with different compressive strengths

的振动影响是比较明显的,抗压强度越大,岩石表面振动的速度越小,振动的位移也越小。抗压强度小的岩石,其振动速度和振动位移都远大于抗压强度大的岩石。

4 结论

(1) 研究钻进过程中岩石特性对岩石振动的影响,建立了岩石振动方程,找到了描述岩石振动的信号指标。通过数值模拟软件进行了钻进模拟,得到冲击荷载下不同岩性模型的应力分布和岩石振动数据,分析了岩石特性与振动信号的关系。

(2) 岩石在钻进过程中产生不同程度的应力集中现象,在冲击荷载作用下岩石的应力分布与岩石性质有关。岩石的密度、刚度以及抗压强度对岩石振动都有影响,其中抗压强度对振动的影响最为明显。

(3) 在保持钻进参数相同的条件下,岩石密度越小,越容易产生振动,振动幅度也越小;岩石刚度和抗压强度与岩石的振动呈负相关,即刚度越小,抗压强度越小的岩石,其振动的速度和位移越大,振动越明显。

参考文献 (References):

[1] 夏宏泉,陈平,石晓兵,等.基于随钻资料的地层岩性实时识别方法[J].石油学报,2004,25(2):51-54.
XIA Hongquan, CHEN Ping, SHI Xiaobing, et al. Real-time recognizing method of lithology based on information while drilling[J]. ActaPetroleiSinica, 2004,25(2):51-54.

[2] 刘希圣.钻井工艺原理[M].北京:石油工业出版社,1988:20-60.
LIU Xisheng. Principles of drilling technology[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1988:20-60.

[3] Drumbeller D S. Attenuation of sound waves in drill strings [J]. Journal of Acoustical Society of America, 1993, 94(1): 2387-2396.

- [4] Drumbeller D S, Knudsen S D. The propagation of sound waves in drill strings[J]. *Journal of Acoustical Society of America*, 1995, 97(4): 2116-2125.
- [5] Tsoutrelis C E. Determination of the compressive strength of rock in situ or in test blocks using a diamond drill[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1969, 6(3): 311-321.
- [6] Hang Z, Monteiro S T, Hatherly P, et al. Automated rock recognition with wavelet feature space projection and Gaussian Process classification[C]// *IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 2010.
- [7] Patel, A. Characterization of cavities in rocks using drilling parameters[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2013, 63: 122-130.
- [8] 岳中琦, 郭建英, 谭国焕, 等. 香港大学钻孔过程数字监测仪在自动化施工和设计中的作用[C]// 全国岩土与工程学术大会, 2003.
YUE Zhongqi, GUO Jianying, TAN Guohuan, et al. The role of the University of Hong Kong drilling process digital monitor in automated construction and design[C]// *National Geotechnical and Engineering Academic Conference*, 2003.
- [9] 岳中琦. 钻孔过程监测(DPM)对工程岩体质量评价方法的完善与提升[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, 33(10): 1977-1996.
YUE Zhongqi. Drilling process monitoring for refining and upgrading rock mass quality classification methods[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, 33(10): 1977-1996.
- [10] 谭卓英, 蔡美峰, 岳中琦, 等. 基于岩石可钻性指标的地层界面识别理论与方法[J]. *北京科技大学学报*, 2006, 28(9): 803-807.
TAN Zhuoying, CAI Meifeng, YUE Zhongqi, et al. Theory and approach of identification of ground interfaces based on rock drillability index[J]. *Journal of University of Science and Technology Beijing*, 2006, 28(9): 803-807.
- [11] 王珍应, 林建, 施太和, 等. 钻柱振动特性分析与井底岩性识别方法初探[J]. *钻采工艺*, 2000, 23(6): 1-3.
WANG Zhenying, LIN Jian, SHI Taihe, et al. Analysis of vibration property for drilling string and discussion on recognition method of bottom hole lithology[J]. *Drilling & Production Technology*, 2000, 23(6): 1-3.
- [12] 田家林, 付传红, 庞小林, 等. 高频扭转振动对钻井过程破岩特性的影响研究[J]. *应用力学学报*, 2016, 33(5): 792-799.
TIAN Jialin, FU Chuanhong, PANG Xiaolin, et al. Study on the influence of high frequency torsional vibration on rock damage characteristics during drilling[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2016, 33(5): 792-799.
- [13] Martin Zborovjan, Igor Leššo. Acoustic identification of rocks during drilling process[J]. *Acta Montanistica Slovaca*, 2003, 8(4): 91-93.
- [14] 刘刚, 孔得臣, 孙金, 等. 套管头振动信号特征应用于油井防碰监测的可行性分析[J]. *中国海上油气*, 2012, 24(3): 54-57.
LIU Gang, KONG Dechen, SUN Jin, et al. Feasibility analysis of casing head vibration signal characteristics applied to oil well anti-collision monitoring [J]. *China Offshore Oil and Gas*, 2012, 24(3): 54-57.
- [15] 刘刚, 张家林, 刘闯, 等. 钻头钻进不同介质时的振动信号特征识别研究[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(8): 71-78.
LIU Gang, ZHANG Jialin, LIU Chuang, et al. An identification method of vibration signal features when bit drills different mediums[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(8): 71-78.
- [16] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989: 338-376.
NI Zhenhua. *Vibration mechanics*[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1989: 338-376.

(编辑 韩丽丽)