全力扭方位计算公式的全新数学推导

鲁天骐[1], 罗栩诩[2]

(1. 重庆理工大学电子信息与自动化学院,重庆 400054; 2. 中国石油长城钻探工程有限公司工程技术研究院,辽宁 盘锦 124010)

摘　要:全力扭方位的数学本质是在给定的约束条件下求装置角,使得方位变化达到最大。文献中已有的几种求解方法在求解过程中没有考虑约束条件,这使得有关计算公式缺乏严格的数学基础。使用有约束极值问题的标准求解方法——拉格朗日乘数法对全力扭方位问题重新进行了数学表述,并推导出了最优解的计算公式。

关键词:钻井工程;全力扭方位;装置角;拉格朗日法

中图分类号:TE243;O174.21　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-7428(2012)07-0006-03

New Mathematical Derivation of Calculation Formula of Highest Level Azimuth Rectifying/*LU Tian-qi*[1], *LUO Xu-xu*[2] (1. School of Electronics and Automation, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China; 2. Engineering & Technology Research Institute, Great Wall Drilling Corporation, PetroChina, Panjin Liaoning 124010, China)

Abstract: Mathematic essence of the highest level azimuth rectifying means to get tool face angle under constrained conditions for the largest azimuth variation. The constrained conditions have not been considered in several solution methods in the existed literatures, this makes the related calculation formula lack strict mathematic foundation. A standard solving method with constrained minimization problems, Lagrange multiplier method, was used for the new mathematical expression of highest level azimuth rectifying and the calculation formula with optimal solution was derived.

Key words: drilling engineering; highest level azimuth rectifying; tool face angle; Lagrangian method

扭方位计算是钻井施工现场常用的一种工程计算[1~3],在刘修善[4,5]、韩志勇[6]的著作中有非常详细的讨论。全力扭方位是一种特殊形式的扭方位,它要求在给定条件下使得方位变化达到最大。全力扭方位计算实际上是求解一个极值问题,在文献[4~6]中提供了几种不同的求解的方法,但是细读之下感觉在数学推导上不是很严格,都没有考虑极值问题中的约束条件。从数学观点上来看,有约束极值问题与无约束极值问题是有本质区别的,尽管在某些特定条件下、有约束极值问题与无约束极值问题的解是相同的。本文遵循有约束极值问题的标准求解方法——拉格朗日乘数法,给出了全力扭方位这一有约束极值问题的标准求解过程,可以看做是对文献中各种方法的一种补充和完善。

约定:除非特别指明,本文公式中的角度参数的物理单位为 rad,长度参数的物理单位为 m,井眼曲率的物理单位为 m^{-1}。

1　扭方位计算的基本公式

假设当前井底的井斜角为 α_1,方位角为 φ_1,初始装置角为 ω,扭方位井段终点的井斜角为 α,方位角为 φ,井段为圆弧井段,弯曲角为 ε,则有[4]:

$$\sin\alpha\cos\varphi = \sin\alpha_1\cos\varphi_1\cos\varepsilon + (\cos\alpha_1\cos\varphi_1\cos\omega - \sin\varphi_1\sin\omega)\sin\varepsilon \tag{1}$$

$$\sin\alpha\sin\varphi = \sin\alpha_1\sin\varphi_1\cos\varepsilon + (\cos\alpha_1\sin\varphi_1\cos\omega + \cos\varphi_1\sin\omega)\sin\varepsilon \tag{2}$$

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1\cos\varepsilon - \sin\alpha_1\cos\omega\sin\varepsilon \tag{3}$$

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_1\cos\alpha + \sin\alpha_1\sin\alpha\cos\Delta\varphi \tag{4}$$

式中:$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1$。

另外,当井段长度 ΔL 和井眼曲率 K 给定时,弯曲角可以由下式计算:

$$\varepsilon = K\Delta L \tag{5}$$

在 4 个独立参数 α、φ、ε、ω 中,只要给定其中的 2 个参数,就能从方程组(3)~(4)求出另外的 2 个参数。

收稿日期:2011-12-11; **修回日期**:2012-06-20

基金项目:本项研究受中国石油长城钻探工程有限公司科技开发项目“钻井数据管理系统配套与应用”(2010A11)的资助

作者简介:鲁天骐(1992-),男(汉族),辽宁盘锦人,重庆理工大学本科生在读,电子信息与自动化专业,重庆市巴南区红光大道 69 号重庆理工大学电子信息与自动化学院 2010 级电气 8 班。

2 全力扭方位的两种算法

全力扭方位是一种特殊形式的扭方位,就是在给定井段长度和井眼曲率(即是相当于弯曲角 ε 为已知参数)的情况下,求初始装置角、使得井段末端方位变化最大。

因为既可以是方位增加、也可以是方位减少,故全力扭方位就是要求 $|\Delta\varphi|$ 为最大的一个极值问题。目前,求这个极值问题有2种方法,尽管数学求解过程有些不同,但最终结果相差不多。

2.1 刘修善方法

刘修善[4,5]给出:

$$\tan\varphi=\frac{\sin\alpha_1\sin\varphi_1+(\cos\alpha_1\sin\varphi_1\cos\omega+\cos\varphi_1\sin\omega)\tan\varepsilon}{\sin\alpha_1\cos\varphi_1+(\cos\alpha_1\cos\varphi_1\cos\omega-\sin\varphi_1\sin\omega)\tan\varepsilon} \tag{6}$$

式(6)实际上是式(2)除以式(1)再化简的结果。

文献[4,5]指出:根据微分学原理,装置角 ω 应满足下面的条件:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\omega}=0 \tag{7}$$

由于上式比较复杂,可以使用下面的等价方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\tan\varphi)=0 \tag{8}$$

然后将式(6)代入式(8),经过复杂的计算之后得:

$$\cos\omega=-\frac{\tan\varepsilon}{\tan\alpha_1} \tag{9}$$

2.2 韩志勇方法

韩志勇[6]给出:

$$\tan\Delta\varphi=\frac{\sin\varepsilon\sin\omega}{\sin\alpha_1\cos\varepsilon+\cos\alpha_1\sin\varepsilon\cos\omega} \tag{10}$$

将式(10)代入下式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\tan\Delta\varphi)=0 \tag{11}$$

经过复杂的计算之后得出的装置角解也是式(9)。

2.3 注解

上述2种方法中都有3个地方需要加以注意:

第一,式(7)与式(8)〔或式(11)〕的等价性并没有经过严格的数学证明;

第二,式(7)只是这个极值问题的必要条件,而不是充分条件,所以所得到的解(9)是不是极值点需要加以验证(也有可能是驻点,即既不是极大值点,也不是极小值点);

第三,由于式(6)〔或式(10)〕本身是有理三角函数,推导出式(8)〔或式(11)〕左边的表达式也是一个比较复杂的求导和化简过程。

3 全力扭方位的新算法

刘修善算法和韩志勇算法都是直接将装置角 ω 作为优化变量来求解一个间接的优化问题。由于优化的目标函数比较复杂,数学推导过程也比较复杂。

从空间圆弧井段的几何学意义上来看,当井段弯曲角给定之后,井段的形状是确定的,当井段末端的井斜角和方位角变化时,所有这样的井段形成一个以井段起点处井眼方向线为对称轴的旋转曲面——曲圆锥,井段的末端在曲圆锥的底圆上。全力扭方位的目标就是在曲圆锥的底圆上选择某个点或多个点,使得 $|\Delta\varphi|$ 达到最大。

如果这样来认识全力扭方位问题,可以形成下面的数学问题(二元约束极值问题):求 α、$\Delta\varphi$,使得在满足约束方程(4)的条件下,求目标函数 $|\Delta\varphi|$ 的极值。

由于目标函数的导数具有不连续点,定义一个等价的、连续可导的新目标函数:

$$f(\alpha,\Delta\varphi)=(\Delta\varphi)^2$$

如果该极值问题有解,再根据式(1)~(3)的任一式反求装置角 ω。

3.1 拉格朗日乘数法求解

拉格朗日乘数法[7]是求解等式约束极值问题的一种有效的方法。定义拉格朗日函数如下:

$$F(\alpha,\Delta\varphi,\lambda)=(\Delta\varphi)^2+\lambda(\cos\alpha_1\cos\alpha+\sin\alpha_1\sin\alpha\cos\Delta\varphi-\cos\varepsilon) \tag{12}$$

则有:

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=-\lambda(\cos\alpha_1\sin\alpha-\sin\alpha_1\cos\alpha\cos\Delta\varphi) \tag{13}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\Delta\varphi}=2\Delta\varphi-\lambda\sin\alpha_1\sin\alpha\sin\Delta\varphi \tag{14}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda}=\cos\alpha_1\cos\alpha+\sin\alpha_1\sin\alpha\cos\Delta\varphi-\cos\varepsilon \tag{15}$$

根据极值问题的驻点条件,

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\frac{\partial F}{\partial\Delta\varphi}=\frac{\partial F}{\partial\lambda}=0$$

得:

$$\cos\Delta\varphi=\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha_1} \tag{16}$$

$$\lambda=\frac{2\Delta\varphi}{\sin\alpha_1\sin\alpha\sin\Delta\varphi} \tag{17}$$

$$\cos\Delta\varphi=\frac{\cos\varepsilon-\cos\alpha_1\cos\alpha}{\sin\alpha_1\sin\alpha} \tag{18}$$

从式(16)和式(18)得:

$$\frac{\cos\varepsilon - \cos\alpha_1 \cos\alpha}{\sin\alpha_1 \sin\alpha} = \frac{\tan\alpha}{\tan\alpha_1} \tag{19}$$

这个方程只包含未知数 α,化简后求得:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\varepsilon} \tag{20}$$

在扭方位时,一般来说井段初始井斜角 $\alpha_1 < \pi/2$,故:

$$\alpha = \arccos \frac{\cos\alpha_1}{\cos\varepsilon} \tag{21}$$

将式(20)代入式(16)得:

$$\sin\Delta\varphi = \pm \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha_1} \tag{22}$$

故:

$$\Delta\varphi = \pm \arcsin \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha_1} \tag{23}$$

上面的结果表明,全力扭方位问题有 2 个解:一个解是方位角增加方向上的,另一个解是方位角减少方向上的,但是这 2 个解的井斜角和方位角增量绝对值是相同的,可以看成是几何意义上的对称解。还应该注意到,上述推导过程完全没有涉及到装置角的概念,这说明全力扭方位问题的数学本身是与装置角无关的。

3.2 装置角的计算

从式(3)得:

$$\cos\omega = \frac{\cos\alpha_1 \cos\varepsilon - \cos\alpha}{\sin\alpha_1 \sin\varepsilon} \tag{24}$$

将式(20)代入式(24),得:

$$\cos\omega = -\frac{\tan\varepsilon}{\tan\alpha_1} \tag{25}$$

这个结果与刘修善方法和韩志勇方法的结果相同,见式(9)。

由于三角函数的周期性,从式(25)反求装置角时有 2 个解,令:

$$\omega_1 = \arccos \frac{-\tan\varepsilon}{\tan\alpha_1} \tag{26}$$

是[0,π]上的解,则另一个解为:$\omega_2 = 2\pi - \omega_1$。根据韩志勇[6]的分析,$\omega_1$ 对应于增方位的解 $\Delta\varphi$,ω_2 对应于减方位的解 $-\Delta\varphi$。

4 结论

(1)在全力扭方位问题的求解方法中,都是以装置角为参数求解一个一元极值问题。但是在井段弯曲角固定的情况下,方位角的变化值是装置角和井段末端井斜角的二元函数,故以一元极值问题来求解全力扭方位问题不具有严谨性;而且全力扭方位问题的各个参数之间具有一定的约束关系,但是原来的解法没有考虑这些约束条件。

(2)本文提供了一个新的解法,将全力扭方位问题描述为二元约束极值问题,并且使用标准的拉格朗日乘子法求出了该问题的解。与原来解法相比较,本文解法在数学上是严谨的,所得到的解具有简单明了的几何直观性。

参考文献:

[1] 向军文.定向对接连通井轨迹设计[J].探矿工程(岩土钻掘工程),2011,38(5):11-14.

[2] 李景东.哈达门沟金矿区复杂地层中深孔钻进实践[J].探矿工程(岩土钻掘工程),2011,37(6):20-23.

[3] 隆东,张新刚,岳刚,等.H024U 井施工工艺及精确中靶技术措施[J].探矿工程(岩土钻掘工程),2011,38(3):5-12.

[4] 刘修善,王珊,贾仲宣,等.井眼轨道设计理论与描述方法[M].黑龙江哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,1993.257-279.

[5] 周大千,刘修善,齐林,等.井眼轨道实用理论基础[M].北京:石油工业出版社,1993.59-72.

[6] 韩志勇.定向钻井设计与计算[M].山东东营:中国石油大学出版社,2007.285-300.

[7] 赵凤治,尉继英.约束最优化计算方法[M].北京:科学出版社,1991.

致谢:感谢长城钻探公司工程院钻井设计与监督中心的领导给予笔者的帮助。

河南省地矿局 2012 年计划实施找矿项目 346 个

《中国矿业报》消息(2012-07-19) 从河南省地矿局召开的找矿突破战略行动推进会议上获悉,2012 年,该局组织实施地质找矿项目达 346 个,投资规模 16 亿元,涉及 10 多个省及 20 多个国家和地区。

在找矿突破战略行动中,河南省地矿局主动与洛阳、三门峡等资源型城市和中国五矿、河南煤化集团、洛钼集团等有实力的大型企业开展战略合作,制定局“358”地质找矿行动计划,并将其列入《河南省地矿局地质工作和经济发展“十二五”规划纲要》;同时,相继出台了一系列推进找矿突破的重大措施。

据了解,在全国开展的找矿突破战略行动中,国土资源部部署的 47 片整装勘查区,其中 4.5 个在河南省境内;而在河南省找矿突破战略行动中,首批启动的 54 个重点整装勘查区,其中 34 个整装勘查区的勘查任务由河南省地矿局承担。